

Esercizio 3 – Arbitraggio.

Siano dati sul mercato i seguenti titoli:

$$z_1 = (-95; 100) / (0; 1)$$

$$z_2 = (-91; 100) / (0; 2)$$

ed un titolo a termine scritto su z_2 per consegna dopo un anno al prezzo forward $F=97$. Mostrare con gli opportuni calcoli che è violata la relazione di non arbitraggio e si studi la strategia di arbitraggio che può essere compiuta per ottenere un unico saldo positivo all'epoca zero.

Dati i titoli z_1 e F , si replichi il titolo $b = (-101,5075; 5; 105)/(0; 1; 2)$

Risoluzione.

Partendo dai titoli z_1 e z_2 possiamo ricavare la struttura dei tassi a pronti e a termine:

$$m(0,1) = \frac{100}{95} = 1,0526 \rightarrow i(0,1) = 5,26\%$$

$$m(0,2) = \frac{100}{91} = 1,0989 \rightarrow i(0,2) = 4,83\%$$

$$m(0,1,2) = \frac{m(0,2)}{m(0,1)} = 1,0440 \rightarrow i(0,1,2) = 4,40\%$$

Il contratto forward (o “a termine”) è un derivato particolarmente semplice. È un accordo col quale ci si **obbliga** a comprare o vendere un'**attività finanziaria** a una certa **data futura**, per un certo **prezzo**. Si differenzia dai contratti a pronti (o contratti spot), che sono accordi per comprare o vendere un'attività con regolamento immediato. Si differenzia anche dalle opzioni che danno al portatore il diritto (e non l'obbligo) di comprare/vendere un'attività a una certa data e a un certo prezzo.

Di solito i forward sono negoziati fuori Borsa tra due istituzioni finanziarie o tra un'istituzione finanziaria e uno dei suoi clienti.

Nei contratti forward, una delle due parti assume una “posizione lunga” (*long position*) e si obbliga a comprare l'attività sottostante a una data specifica, per un certo prezzo. L'altra parte assume una “posizione corta” (*short position*) e s'impegna a vendere l'attività alla stessa data, per lo stesso prezzo.

Il contratto forward in oggetto nell'esercizio ha come sottostante il titolo z_2 e prevede l'obbligo di comprare/vendere il suddetto titolo all'epoca 1 al prezzo di 97. Il forward ha pertanto scadenziario $F = (-97; 100)/(1; 2)$.

Verifichiamo se il contratto F ha un prezzo coerente rispetto alla struttura dei tassi individuata prima:

$$100 \cdot v(0;1;2) = \frac{100}{m(0;1;2)} = \frac{100}{1,0440} = 95,79 \neq 97$$

Deduciamo quindi che il prezzo di F è sovra-quotato. Possiamo quindi effettuare un'operazione di arbitraggio ottenuta vendendo l'operazione F e acquistando i titoli z_1 e z_2 . Il guadagno realizzato all'epoca uno è dato dalla differenza $97 - 95,79 = 1,21$ mentre il guadagno ottenuto all'epoca zero sarà dato da $1,21 \cdot v(0,1) = 1,15$.

Indichiamo con α , β e γ le quote dei tre titoli con l'obiettivo di realizzare un arbitraggio per ottenere un unico saldo positivo all'epoca zero.

La condizione richiesta si traduce quindi nel modo seguente:

$$(-95\alpha - 91\beta; 100\alpha + 97\gamma; 100\beta - 100\gamma) / (0; 1; 2) = (1,15; 0; 0) / (0; 1; 2)$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema (α , β o γ assumeranno un valore opposto se cambiamo i segni nei rispettivi scadenziari):

$$\begin{cases} -95\alpha - 91\beta = 1,15 \\ 100\alpha + 97\gamma = 0 \\ 100\beta - 100\gamma = 0 \rightarrow \beta = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -95\alpha - 91\beta = 1,15 \\ 100\alpha + 97\beta = 0 \rightarrow \alpha = -0,97\beta \end{cases}$$

$$-95 \cdot (-0,97\beta) - 91\beta = 1,15 \Rightarrow \boxed{\beta = \gamma = 1} \rightarrow \boxed{\alpha = -0,97}$$

Vogliamo infine replicare il titolo b utilizzando i titoli z_1 e F . Indichiamo con λ e μ le quote incognite. Avremo perciò lo scadenziario:

$$(-95\lambda; 100\lambda - 97\mu; 100\mu) / (0; 1; 2) = (-101,5075; 5; 105) / (0; 1; 2)$$

Si deduce immediatamente che

$$\lambda = \frac{101,5075}{95} = \boxed{1,0685}$$

$$\mu = \frac{105}{100} = \boxed{1,05}$$

Si verifica automaticamente che $100\lambda - 97\mu = 5$.